ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

VŨ XUÂN HIỂN

VỀ VÉCTƠ TRỌNG SỐ RBF CHO PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI RBF-FD TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 6/2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

VŨ XUÂN HIỂN

VỀ VÉCTƠ TRỌNG SỐ RBF CHO PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI RBF-FD TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. ĐẶNG THỊ OANH

Thái Nguyên, 6/2020

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Đặng Thị Oanh - Người đã tận tình hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này. Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu trường THPT Ân Thi, Hưng Yên và tập thể các thầy cô giáo trong tổ Toán Tin của Trường đã tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong thời gian tác giả tham gia học cao học.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cám ơn đến tập thể lớp K12A6, gia đình bạn bè đã giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Tác giả

Vũ Xuân Hiển

Danh mục ký hiệu

Ω	Miền hình học.
Ξ	Tập các các tâm trong miền và trên biên Ω.
Ξ_{int}	Tập các tâm nằm trong miền Ω.
$\partial\Omega$	Tập các tâm nằm trên biên $\partial\Omega$.
ζ	Tâm thuộc tập Ξ_{int}.
g	Hàm trên biên.
f	Hàm vế phải của phương trình Poisson.
w	véc tơ trọng số.
u	Nghiệm giải tích.
$\tilde{u}$	Nghiệm xấp xỉ.
∞	Vô cùng.
$\mathbb{R}^n$	Không gian n chiều.
λ	Giá trị riêng của ma trận.
ϕ	Hàm cơ sở bán kính.
ϵ	Tham số hình dạng.
A	Ma trận của hệ phương trình đại số tuyến tính.
b	Véc tơ vế phải của hệ phương trình đại số tuyến tính.
x	Nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính.
E	Ma trận đơn vị.
X	Bộ tâm gồm ξ và ζ. Ký hiệu: $X = \{\zeta, \xi_1, ..., \xi_k\}$.
k	Số các điểm ξ_i cần thiết trong tập Ξ_ζ.

Mở đầu

Trong suốt thế kỷ XX, một loạt các phương pháp số đã hình thành và phát triển như các phương pháp sai phân hữu hạn (finite difference - FD), phương pháp phần tử hữu hạn (finite element method - FEM), phương pháp thể tích hữu hạn (Finite Volume Method -FVM), phương pháp phần tử biên (Boundary Element Method - BEM)... Những phương pháp này đã đem lại những đóng góp to lớn trong việc ứng dụng toán học vào thực tiễn. Tuy nhiên, chúng còn nhiều hạn chế khi áp dụng vào lớp các bài toán thực tế có cấu trúc phức tạp như: lưới biến dạng trên phạm vi rộng, số chiều không gian cao, hàm vế phải hoặc hàm điều kiện biên có kì dị (có độ dao động lớn). Khó khăn lớn nhất ở đây là sinh lưới, duy trì lưới và cập nhật lưới. Đó là lý do thúc đẩy các nhà khoa học thuộc các lĩnh vực khác nhau, tìm kiếm những phương pháp mới nhằm khắc phục những hạn chế này của các phương pháp lưới.

Để khắc phục một số nhược điểm của phương pháp lưới, người ta đã đưa ra phương pháp không lưới giải phương trình đạo hàm riêng [4, 5, 9, 11, 12, 14]. Một trong các cách tiếp cận không lưới là phương pháp RBF – FD (Radial Basis Funcion - Finite Difference) [9, 11, 12, 14].
- Hàm cơ sở bán kính $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ là hàm xác định dương và giá trị của nó chỉ phụ thuộc vào chuẩn của véctơ biến, tức là $\Phi(x) = \phi(||x||_2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^d$ và $\phi : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm cho trước nào đó [6, 10]. Sử dụng sự thay đổi của hàm này để xây dựng nội suy hàm cơ sở bán kính (RBF – Interpolation) [6, 10]. Tiếp đó nội suy hàm cơ sở bán kính được sử dụng xấp xỉ toán tử vi phân, nhằm tạo ra các phương pháp xấp xỉ giải phương trình vi phân đạo hàm riêng. Phương pháp RBF – FD được xây dựng theo lược đồ này. Phương pháp RBF – FD là phương pháp không lưới sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính với cách tiếp cận địa phương, và dựa trên sự rời rạc hóa giống như phương pháp FD để tính xấp xỉ nghiệm tại một số điểm rời rạc trong miền xác định. Khi sử dụng phương pháp RBF – FD giải bài toán d chiều với d lớn tùy ý, thì thay vì phải làm việc với hàm d biến, ta chỉ cần làm việc với hàm một biến. Một lợi thế của kỹ thuật rời rạc không lưới là chỉ cần dựa trên tập điểm

độc lập phân bố bất kỳ, không cần tạo ra cấu trúc lưới. Do đó, không còn cần chi phí dành cho sinh lưới, duy trì lưới và cập nhật lưới.
- Các nghiên cứu về phương pháp không lưới dựa trên hàm cơ sở bán kính (Radial Basis Function – RBF) và ứng dụng giải phương trình đạo hàm riêng đã được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm. Luận văn tập trung trình bày cách tính véctơ trọng số dựa trên nội suy RBF trong không gian ba chiều cho phương pháp sai phân hữu hạn không lưới trên cơ sở đọc hiểu và tổng hợp từ các quyển sách [1, 6, 7, 10] và các bài báo [14, 15].

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về cơ sở của bài toán nội suy hàm số với dữ liệu phân tán; nội suy hàm số với dữ liệu phân tán; một số hàm cơ sở bán kính và lược đồ phương pháp sai phân hữu hạn giải phương trình đạo hàm riêng trong không gian 3 chiều. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1, 6, 7, 10].

1.1 Cơ sở của bài toán nội suy hàm số với dữ liệu phân tán

Trong thực tế nhiều khi phải phục hồi một hàm số $f(x)$ tại mọi giá trị của x trên đoạn $[a;b]$ mà chỉ biết một số hữu hạn giá trị của hàm số tại một số hữu hạn các điểm rời rạc của đoạn đó. Các giá trị đó được cung cấp qua thực nghiệm hay tính toán, vì vậy nảy sinh một vấn đề toán học như sau: Trên đoạn $[a;b]$ cho một lưới các điểm chia (điểm nút) x_i, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ và tại các nút x_i cho giá trị của hàm số $y = f(x)$ là $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Cần xây dựng đa thức nội suy $P_n(x)$ sao cho $P_n(x)$ trùng với $f(x)$ tại tất cả các nút x_i, nghĩa là:

$$P_n(x_i) = y_i; \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

Một số phương pháp nội suy truyền thống được đưa ra và giải quyết rất tốt bài toán trên, điển hình là phương pháp nội suy Lagrange và phương pháp nội suy Newton. Đa thức nội suy Lagrange rất đơn giản và dễ tính, nếu các nút nội suy đã được cố định. Nhưng nếu ta bổ sung thêm nút nội suy thì quá trình tính lại phải tính lại từ đầu. Phương pháp nội suy Newton khắc phục được nhược điểm của nội suy Lagrange ở chỗ khi thêm vào lưới nội suy một nút nội suy mới x_{n+1}, ta chỉ cần thêm vào đa thức nội suy $P_n(x)$ một số hạng. Tuy nhiên, khi số mốc nội suy lớn thì nội suy bằng đa thức thường xảy ra hiện tượng phù hợp trội (overfitting) do bậc của đa thức thường tăng theo số mốc nội suy. Hơn nữa, đa số các bài toán nội suy trong các ứng dụng thực tiễn lại là bài toán nội suy nhiều biến. Để khắc phục nhược điểm này, một phương pháp nội suy được đề xuất bởi Powell vào năm 1987 là phương pháp nội suy hàm cơ sở bán kính (*Radial basis function*-RBF) có thể chuyển từ bài toán nội suy hàm nhiều biến về nội suy hàm một biến. Hơn nữa còn cho kết quả rất tốt, đặc biệt với bài toán nội suy hàm nhiều biến trên tập dữ liệu phân tán.

1.2 Một số định nghĩa và khái niệm

Bài toán 1.1

Cho bộ dữ liệu $(x_i; y_i), i = 1, 2, ..., n, x_i \in \mathbb{R}^d; y_i \in \mathbb{R}$, trong đó x_i là các vị trí đo; y_i là kết quả đo được tại vị trí x_i. $B_1, B_2, ..., B_n$ là các hàm cơ sở của không gian tuyến tính của các hàm liên tục d biến. Ký hiệu là:

$$F = span\{B_1, B_2, ..., B_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k B_k; c_k \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.1}$$

Tìm hàm $P_f \in F$ sao cho

$$P_f(x_i) = y_i; \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.2}$$

vì $P_f \in F$ nên ta có

$$P_f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k B_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

Từ (1.2) và (1.3) ta có

$$Ac = y, \tag{1.4}$$